12. November 2007

Berechnung der spezifischen Wärmekapazität der Ersatzkonstruktion

von

Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Klaus Kreč
Büro für Bauphysik
A-3562 Schönberg am Kamp Veltlinerstraße 9
Österreich
Tel. +43-2733-8780-2 Fax +43-2733-8780-4
email: dr.krec@aon.at

A2. Berechnung der spezifischen Wärmekapazität der Ersatzkonstruktion

Der im Folgenden dargelegte Algorithmus erlaubt es, die spezifische Wärmekapazität der als Ersatzkonstruktion dienenden fiktiven, homogenen Schicht derart zu berechnen, dass die flächenbezogene wirksame Wärmekapazität dieser homogenen Schicht genau der flächenbezogenen wirksamen Wärmekapazität des mehrdimensional berechneten Ausschnitts der untersuchten Ziegelwand entspricht.

A2.1 Die flächenbezogene wirksame Wärmekapazität

Als Definition für die wirksame Wärmekapazität C_m wird der Ansatz des nationalen Vorworts der ÖNorm EN ISO 13786 [1] in der Form

$$C_m = \frac{T}{2\cdot\pi}\cdot\left|\sum_n \tilde{L}_{m,n}\right| \tag{A2.1}$$

heran gezogen. C_m bezieht sich auf die gesamte, dem Raum mit dem Index *m* zugewandte Oberfläche. Die Größen $\tilde{L}_{m,n}$ sind die harmonischen thermischen Leitwerte, die die instationäre thermische Verkopplung zwischen den Räumen mit dem Indices *m* und *n* beschreiben♣. Der Ansatz (A2.1) ist auf beliebig gestaltete und zusammengesetzte, an beliebig viele unterschiedliche Räume angrenzende Baukonstruktionen anwendbar. Die harmonischen thermischen Leitwerte sind jeweils über alle an die Baukonstruktion angrenzende Räume, also auch über den betrachteten Raum *m* zu summieren.

Im Spezialfall eindimensionaler Wärmeleitung grenzen zum einen nur zwei Räume an die Baukonstruktion. Zum anderen ist bei plattenförmigen Bauteilen der Bezug auf die Bauteilfläche in eindeutiger Weise möglich, sodass sich die Einführung der flächenbezogenen wirksamen Wärmespeicherkapazität χ als Bauteileigenschaft gemäß

♣ Die in früheren Versionen der EN ISO 13786 eingeführte Konvention, komplexwertige Kenngrößen, wie z. B. die harmonischen, thermischen Leitwerte durch Tilden über dem Symbol zu kennzeichnen, wird hier als sinnvoll übernommen.

$$\chi_1 = \frac{C_1}{A} = \frac{T}{2\cdot\pi}\cdot\left|\frac{\tilde{L}_{1,1}}{A}+\frac{\tilde{L}_{1,2}}{A}\right| = \frac{T}{2\cdot\pi}\cdot\left|\tilde{Y}_{1,1}+\tilde{Y}_{1,2}\right| \quad . \tag{A2.2}$$

anbietet. Die komplexwertigen Größen $\tilde{Y}_{1,1}$ und $\tilde{Y}_{1,2}$ sind flächenbezogene harmonische thermische Leitwerte und werden in der ÖNorm EN ISO 13786 [1] „Wärmeaufnahme“ ($\tilde{Y}_{1,1}$) bzw. „dynamische Wärmeaufnahme“ ($\tilde{Y}_{1,2}$) genannt.

Da die gesuchte Ersatzkonstruktion für die inhomogene Ziegelwand eine homogene Schicht ist und zudem die Wärmeübergangswiderstände gemäß ÖNorm EN ISO 13786 [1] auf beiden Seiten der Schicht auf null zu setzen sind, ist auch die flächenbezogene wirksame Wärmekapazität auf beiden Seiten der homogenen Schicht gleich. Es gilt also

$$\chi_1 = \chi_2 \quad . \tag{A2.3}$$

Gemäß Anhang A1, Gleichung (A1.39), besteht im Fall eindimensionaler Wärmeleitung zwischen den flächenbezogenen harmonischen thermischen Leitwerten $\tilde{Y}$ und den Elementen der Kettenmatrix der homogenen Schicht $\tilde{Z}$ – sie soll im Folgenden als Schichtmatrix[♦] bezeichnet werden – die Beziehung

$$\tilde{Y}_{1,1} = \frac{\tilde{Z}_{1,1}}{\tilde{Z}_{1,2}} \qquad \text{und} \qquad \tilde{Y}_{1,2} = -\frac{1}{\tilde{Z}_{1,2}} \quad . \tag{A2.4}$$

Die flächenbezogene wirksame Wärmekapazität für beide Seiten der homogenen Schicht ergibt sich aus den Gleichungen (A2.2) und (A2.4) zu

$$\chi = \frac{C}{A} = \frac{T}{2\cdot\pi}\cdot\left|\frac{\tilde{Z}_{1,1}-1}{\tilde{Z}_{1,2}}\right| \quad . \tag{A2.5}$$

Diese Gleichung entspricht dem im nationalen Vorwort der ÖNorm EN ISO 13786 [1] zur Berechnung der wirksamen Wärmekapazität angegebenen Ansatz.

Anmerkung: Im Vorwort der ÖNorm EN ISO 13786 [1] ist folgender Schreibfehler zu finden:

Anstelle von $C_2 = A\cdot\frac{T}{2\cdot\pi}\cdot\left|\frac{Z_{12}-1}{Z_{12}}\right|$ muss es $C_2 = A\cdot\frac{T}{2\cdot\pi}\cdot\left|\frac{Z_{22}-1}{Z_{12}}\right|$ heißen!

Die Elemente der Schichtmatrix der als Ersatzkonstruktion dienenden homogenen Schicht können gemäß Gleichung (13) der ÖNorm EN ISO 13786 [1] in der Form

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{1,1} &= \cosh(\xi)\cdot\cos(\xi) + j\cdot\sinh(\xi)\cdot\sin(\xi)\\ \tilde{Z}_{1,2} &= -\frac{\delta}{2\cdot\lambda}\cdot\left\{\sinh(\xi)\cdot\cos(\xi)+\cosh(\xi)\cdot\sin(\zeta)+j\cdot\left[\cosh(\xi)\cdot\sin(\xi)-\sinh(\xi)\cdot\cos(\xi)\right]\right\}\end{aligned} \tag{A2.6}$$

angeschrieben werden. Die Größe δ in Gleichung (A2.6) ist die periodische Eindringtiefe und gemäß

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda\cdot T}{\pi\cdot\rho\cdot c}} \tag{A2.7}$$

[♦] Die Bezeichnung „Übergangsmatrix“ der EN ISO 13786 für $\tilde{Z}$ wird hier bewusst nicht übernommen, da der Begriff „Übergang“ für die Vorgänge an der Bauteiloberfläche bereits besetzt ist (z. B. Wärmeübergangswiderstand, Wärmeübergangskoeffizient).

definiert. Als dimensionslose Variable ξ tritt in Gleichung (A2.6) das Verhältnis aus der Schichtdicke *d* und der periodischen Eindringtiefe δ auf:

$$\xi = \frac{d}{\delta} \quad . \tag{A2.8}$$

Es stellt sich nun die Aufgabe, aus der gemäß Gleichung (A2.2) errechneten flächenbezogenen wirksamen Wärmekapazität χ - die harmonischen thermischen Leitwerte $\tilde{L}_{m,n}$ werden als Ergebnis einer mehrdimensional instationären durchgeführten numerischen Berechnung erhalten – die spezifische Wärmekapazität c der als Ersatzkonstruktion dienenden homogenen Schicht zu errechnen. Die Wärmeleitfähigkeit λ dieser Schicht wird aus dem Ergebnis der mehrdimensionalen stationären Berechnung abgeleitet und ist damit bekannt. Auch die Massendichte ρ wird als bekannt voraus gesetzt.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn der Wert der Variablen ξ errechnet wurde, da sich die gesuchte spezifische Wärmekapazität c aus den Gleichungen (A2.7) und (A2.8) gemäß

$$c = \frac{\lambda \cdot T}{\pi \cdot \rho} \cdot \frac{\xi^2}{d^2} \tag{A2.9}$$

ergibt.

Das Einsetzen der Elemente der Schichtmatrix gemäß (A2.6) in Gleichung (A2.5) führt zunächst auf die Form

$$\chi = \frac{\lambda \cdot T}{\pi \cdot \delta} \cdot \sqrt{\frac{[\cosh(\xi)\cdot\cos(\xi) - 1]^2 + \sinh^2(\xi)\cdot\sin^2(\xi)}{[\sinh(\xi)\cdot\cos(\xi) + \cosh(\xi)\cdot\sin(\xi)]^2 + [\cosh(\xi)\cdot\sin(\xi) - \sinh(\xi)\cdot\cos(\xi)]^2}} \tag{A2.10}$$

Durch Ausmultiplizieren und Anwenden der Beziehungen $\cos^2(\xi) + \sin^2(\xi) = 1$ bzw. $\cosh^2(\xi) - \sinh^2(\xi) = 1$ lässt sich Gleichung (A2.10) auf die einfache Form

$$\chi = \frac{\lambda \cdot T}{\pi \cdot d} \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{\cosh(\xi) - \cos(\xi)}{\cosh(\xi) + \cos(\xi)}} \tag{A2.11}$$

bringen.

Die Berechnung von ξ entspricht der Suche nach der Nullstelle der Funktion

$$f(\xi) = \frac{\lambda \cdot T}{\pi \cdot d} \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{\cosh(\xi) - \cos(\xi)}{\cosh(\xi) + \cos(\xi)}} - \chi \quad . \tag{A2.12}$$

Die Ermittlung der Nullstelle der Funktion $f(\xi)$ erfolgt durch Anwendung eines numerischen Verfahrens. Hierzu ist z. B. die Newton'sche Näherungsmethode gut geeignet. Nach diesem Verfahren ist der Wert

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \tag{A2.13}$$

eine bessere Näherung für den Wert der Nullstelle der Funktion $f(\xi)$ als der einen Iterationsschritt davor ermittelte Wert ξ_n [2]. Voraussetzung für die Konvergenz der Methode ist allerdings, dass beim ersten Iterationsschritt ein Wert für ξ_0 eingesetzt wird, der bereits in der Nähe der Nullstelle liegt. Für die gegenständliche Fragestellung ist ein solcher Wert aber leicht anzugeben, da davon auszugehen ist, dass die zu berechnende spezifische Wärmekapazität der fiktiven homogenen Schicht in der Nähe von 1000 $Jkg^{-1}K^{-1}$ zu liegen kommen wird. Als Schätzwert für die gesuchte Nullstelle bzw. als Anfangswert für die Newton-Iteration ist somit gemäß Gleichung (A2.9) der Wert

$$\xi_0 = 10 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot \pi \cdot \rho}{\lambda \cdot T}} \tag{A2.14}$$

gut geeignet. Die Periodenlänge T in Gleichung (A2.14) ist in Sekunden anzugeben. Bei normgemäßer Berechnung sind dies 86400 s, also 24 h.

Anmerkung: Natürlich sind die angeführten Überlegungen auf beliebige Periodenlängen anwendbar.

Die Anwendung von Gleichung (A2.13) zur iterativen Berechnung der Nullstelle der Funktion $f(\xi)$ erfordert die Kenntnis der Ableitung der Funktion $f(\xi)$ nach ξ:

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi} \quad . \tag{A2.15}$$

Die Ableitung der in Gleichung (A2.12) ´definierten Funktion $f(\xi)$ nach ξ führt auf folgende Form

$$f'(\xi) = \frac{\lambda \cdot T}{\pi \cdot d} \cdot \frac{\left(\xi \cdot \frac{\sinh(\xi) \cdot \cos(\xi) + \cosh(\xi) \cdot \sin(\xi)}{\cosh(\xi) + \cos(\xi)} + \cosh(\xi) - \cos(\xi) \right)}{\sqrt{2 \cdot \left[\cosh^2(\xi) - \cos^2(\xi) \right]}} \quad . \tag{A2.16}$$

Gleichung (A2.13) nimmt nun unter Berücksichtigung der Gleichungen (A2.12) und (A2.16) die Form

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{\xi_n \cdot \left[\cosh^2(\xi_n) - \cos^2(\xi_n) \right] - \frac{\pi \cdot d}{\lambda \cdot T} \cdot \sqrt{2 \cdot \left[\cosh^2(\xi_n) - \cos^2(\xi_n) \right]} \cdot \left[\cosh(\xi_n) + \cos(\xi_n) \right] \cdot \chi}{\xi_n \cdot \left[\sinh(\xi_n) \cdot \cos(\xi_n) + \cosh(\xi_n) \cdot \sin(\xi_n) \right] + \cosh^2(\xi_n) - \cos^2(\xi_n)} \tag{A2.17}$$

an. Der Wert von ξ, der zur Nullstelle der Funktion (A2.12) gehört, kann durch iterative Anwendung der Gleichung (A2.17) mit beliebiger Genauigkeit errechnet werden. Die gesuchte spezifische Wärmekapazität c der homogenen Schicht kann hierauf durch Anwendung der Gleichung (A2.9) unmittelbar angegeben werden.

A2.2 Literatur

[1] ÖNorm EN ISO 13786: Wärmetechnisches Verhalten von Bauteilen – Dynamisch-thermische Kenngrößen – Berechnungsverfahren, Ausgabe: 2000-08-01 (2000)

[2] *Bartsch, H.J.*: Taschenbuch mathematischer Formeln, Verlag Harri Deutsch Thun, Frankfurt am Main (1982)